

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI, 15.02.2025**Clasa a XI-a****Barem de corectare și notare****Subiectul I (7 puncte)**Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $AB = \begin{pmatrix} 2024 & 2025 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.a) Aflați matricea A știind că $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;b) Arătați ca matricea BA este inversabilă și $BA - (BA)^{-1} = 2025 \cdot I_2$.**Soluție:**

a) Oficiu.....1p

 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2022 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$2pb) $\det(AB) = -1 \neq 0$ $\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(BA) \Rightarrow \det(BA) = -1 \neq 0 \Rightarrow A, B, AB$ sunt inversabile.....2p

$$(AB)^2 - \text{Tr}(AB) \cdot AB + \det(AB) \cdot I_2 = O_2 \Leftrightarrow (AB)^2 - 2025 \cdot A \cdot I_2 = O_2 \Leftrightarrow$$

$$ABAB - I_2 = 2025AB \Leftrightarrow BA \cdot A^{-1}B^{-1} = 2025 \cdot I_2 \Leftrightarrow BA - (BA)^{-1} = 2025 \cdot I_2 \dots\dots\dots 2p$$

Subiectul II (7 puncte)ASe consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Dacă $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & c_n & d_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$,calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^{b_n+d_n}$.**Soluție:**

Oficiu.....1p

 $A^n = (I_3 + B)^n = I_3 + (2^n - 1)B$2p $a_n = b_n = d_n = 2^n - 1$ și $c_n = 2^n$2p $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^{b_n+d_n} = e^{-2}$2p**Subiectul III (7 puncte)**Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin relația $2024^{x_n} + 2025^{x_n} = n, \forall n \geq 1$.a) Arătați că ecuația $2024^x + 2025^x = n$ are soluție reală unică, $\forall n \geq 1$.b) Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător și nemărginit.c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{x_n}$.**Soluție:**

Oficiu.....1p

 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = 2024^x + 2025^x$ f surjectivă



Ecuția $f(x) = n$ are cel puțin o soluție.....1p

f strict crescătoare, deci este funcție injectivă, ecuația $f(x) = n$ are cel mult o soluție1p

$f(x_n) = n$

$f(x_{n+1}) = n+1 \Rightarrow f(x_n) < f(x_{n+1}) \Rightarrow x_n < x_{n+1}$1p

Presupunem (x_n) mărginit $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ a.î. $x_n \leq M \Rightarrow f(x_n) \leq f(M) \Rightarrow n \leq f(M)$, (fals).....1p

$\frac{\ln n}{x_n} = \ln 2025 - \frac{1}{x_n} \ln \left[\left(\frac{2024}{2025} \right)^{x_n} + 1 \right] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{x_n} = \ln 2025$2p

Subiectul IV (7 puncte)

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = a \in \mathbb{R}$ și $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{2a_n^2 + 1}} \forall n \geq 1$. Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n^2$.

Problema 28989 – GM nr. 11/2024

Soluție:

Oficiu.....1p

Dacă $a_1 = 0$, atunci $a_n = 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} na_n^2 = 0$ 1p

Dacă $a_1 \neq 0$, atunci $a_n \neq 0, \forall n \geq 1$

Fie $x_n = \frac{1}{a_n^2}, \forall n \geq 1$

Atunci $x_1 = \frac{1}{a^2}$ și $x_{n+1} = x_n + 2, \forall n \geq 1 \Rightarrow (x_n)$ este stric crescător.....1p

Și $x_n = x_1 + 2n - 2, \forall n \geq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 1p

$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{x_{n+1}-x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} na_n^2 = \frac{1}{2}$3p

Notă:

- Timp de lucru 3 ore;
- Toate subiectele sunt obligatorii.